N10/5/MATHL/HP3/SPA/TZ0/SE

88107228

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – SERIES Y ECUACIONES DIFERENCIALES

Lunes 15 de noviembre de 2010 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 7]*

Halle $\lim_{x \to 0}\left(\frac{1-\cos x^6}{x^{12}}\right)$.

2. *[Puntuación máxima: 16]*

Determine si las siguientes series son o no convergentes.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}-\operatorname{sen}\frac{(n+1)\pi}{2}\right)$ *[3 puntos]*

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n-1}{\pi^n}$ *[7 puntos]*

(c) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n(n-1)}$ *[6 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 9]*

(a) Utilizando la serie de Maclaurin para la función e^x, escriba los cuatro primeros términos de la serie de Maclaurin para $e^{-\frac{x^2}{2}}$. *[3 puntos]*

(b) A partir de lo anterior, halle los cuatro primeros términos de la serie para $\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$. *[3 puntos]*

(c) Utilice el resultado del apartado (b) para hallar un valor aproximado de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$. *[3 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 13]*

Resuelva la ecuación diferencial

$$(x-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+xy=(x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$$

sabiendo que para $x=0$, $y=1$. Dé la respuesta de la forma $y=f(x)$.

5. *[Puntuación máxima: 15]*

Considere la serie infinita

$$\frac{1}{2\ln 2}-\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}-\frac{1}{5\ln 5}+\dots.$$

(a) Compruebe que la serie es convergente. *[4 puntos]*

(b) Determine si la serie es absolutamente convergente o condicionalmente convergente. *[11 puntos]*